УДК 330.43(075.8)

МОДЕЛЬ ВЗАИМОЗАВИСИМЫХ УРАВНЕНИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА НЕРАВЕНСТВ НА СТРУКТУРНЫЕ ПАРАМЕТРЫ

В.А. Талызин,
Казанский (Приволжский) федеральный университет
Россия, г. Казань

Ключевые слова: *оценка, параметры, система, взаимозависимые, уравнения, ограничения, неравенства.*

Введение

Определение оценок структурных параметров системы одновременных уравнений в классическом регрессионном анализе выполняется в предположении, что они не связаны никакими дополнительными ограничениями. На практике значения параметров не всегда могут быть произвольными.

В работе [1] рассматривается вопрос оценки структурных параметров системы взаимозависимых уравнений с учётом дополнительных ограничений типа равенств методом множителей Лагранжа. Решение задачи усложняется, если дополнительные ограничения сформулированы в виде линейных неравенств. Здесь предлагается метод, когда исходная задача преобразуется в нелинейную задачу Куна-Таккера, для решения которой используется метод последовательного исключения переменных с использованием взаимодополнительных переменных.

1. Постановка задачи

После формализации экономического процесса получена система взаимозависимых линейных уравнений:

$$y_i = \beta_{i0} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{ij} x_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \beta_{ip+j} y_j + \varepsilon_i, \ i = \overline{1,m}, \tag{1}$$

где x_j, $j = \overline{1,p}$, y_i, $i = \overline{1,m}$ – экзогенные и эндогенные переменные соответственно, известные по n наблюдениям.

На основе этих данных требуется оценить систему взаимозависимых уравнений (1), когда неизвестные структурные параметры β_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{0, p+m}$, $j \neq p+i$ должны удовлетворять системе линейных неравенств:

$$\sum_{j=0}^{p+m} \alpha_{ij}^{k} \cdot \beta_{kj} \geq c_{ki}, \quad k = \overline{1,m}, \quad i = \overline{1,m_k}, \tag{2}$$

$$\beta_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{0, p+m}, \quad j \neq p+i, \tag{3}$$

где коэффициенты c_{ki}, α_{ij}^{k}, $k = \overline{1,m}$, $j = \overline{0, p+m}$, $i = \overline{1,m_k}$ считаются заданными.

Отметим, что каждая подсистема с индексом k в системе (2) содержит структурные параметры только k – го уравнения системы (1).

Будем также полагать, что система (1) либо точно идентифицируема, либо сверхидентифицируема.

Требуется на основе имеющихся статистических данных по переменным x_j, $j=\overline{1,p}$, y_i, $i=\overline{1,m}$ выполнить оценку структурных параметров системы (1) при условии, что они удовлетворяют ограничениям (2), (3).

2. Метод решения

Систему (1) преобразуем в приведенную форму, когда в правой части уравнений системы содержатся только экзогенные переменные x_j, $j=\overline{1,p}$

$$y_i = \gamma_{i0} + \sum_{j=1}^{p} \gamma_{ij} x_j + \eta_i, \quad i=\overline{1,m}, \tag{4}$$

где γ_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{0,p}$ – приведённые параметры.

Уравнения (4) являются независимыми, и каждое из них может быть оценено обычным методом наименьших квадратов (МНК):

$$\tilde{y}_i = a_{i0} + \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j, \quad i=\overline{1,m}. \tag{5}$$

По формулам (5) можно получить расчётные значения эндогенных переменных $\tilde{y}_i$ для всех n наблюдений, поскольку значения x_j в этих наблюдениях известны.

Если расчётные значения $\tilde{y}_i$ подставить в правую часть уравнений системы (1), то каждое уравнение структурной формы будет независимым и его структурные параметры можно оценить МНК с учётом соответствующего ограничения (2), (3).

Рассмотрим этот подход на примере первого уравнения системы (1).

Наблюдаемые значения эндогенных x_i и расчётные значения эндогенных переменных $\tilde{y}_i$ должны удовлетворять уравнениям:

$$y_{1i} = \beta_{10} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{1j} x_{ji} + \sum_{j=2}^{m} \beta_{1p+j} \tilde{y}_{ji} + \varepsilon_{1i}, \quad i=\overline{1,n} \tag{6}$$

при условии, что выполняются линейные неравенства:

$$\sum_{\substack{j=0 \\ j\neq p+1}}^{p+m} \alpha_{ij}^{1} \beta_{1j} \geq c_{1i}, \quad i=\overline{1,m_1}, \tag{7}$$

$$\beta_{1j} \geq 0, \qquad j=\overline{0,p+m}, \quad j \neq p+i \tag{8}$$

Введём в рассмотрение следующие обозначения

$$x_{p+2} = \tilde{y}_2, \ldots, x_{p+m} = \tilde{y}_m,$$

а также матрицы и векторы:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \ldots & x_{p1} & x_{p+2\,1} & \ldots & x_{p+m\,1} \\ 1 & x_{12} & \ldots & x_{p2} & x_{p+2\,2} & \ldots & x_{p+m\,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{1n} & \ldots & x_{pn} & x_{p+2\,n} & \ldots & x_{p+m\,n} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1n} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{10}^1 & \alpha_{11}^1 & \cdots & \alpha_{1p+m}^1\\ \alpha_{20}^1 & \alpha_{21}^1 & \cdots & \alpha_{2p+m}^1\\ . & . & \cdots & .\\ \alpha_{m_10}^1 & \alpha_{m_11}^1 & \cdots & \alpha_{m_1p+m}^1\end{pmatrix},\ \beta=\begin{pmatrix}\beta_{10}\\ .\\ \beta_{1p}\\ \beta_{1p+2}\\ .\\ \beta_{1p+m}\end{pmatrix},\ \varepsilon=\begin{pmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{12}\\ \vdots\\ \varepsilon_{1n}\end{pmatrix},\ c=\begin{pmatrix}c_{11}\\ c_{12}\\ \vdots\\ c_{1m_1}\end{pmatrix}. \tag{10}$$

Тогда уравнение (6) и ограничения (7), (8) запишутся соответственно

$$Y = X\beta + \varepsilon, \tag{11}$$

$$A\beta \ge c, \quad \beta \ge 0. \tag{12}$$

Требуется оценить структурные параметры уравнения (11), если они удовлетворяют линейным неравенствам (12).

МНК-оценки b_{1j} структурных параметров β_{1j} находятся путём решения следующей задачи квадратичного программирования:

найти минимум квадратичной функции

$$Q_e(b) = (Y - Xb)'(Y - Xb) \tag{13}$$

при выполнении неравенств

$$Ab \ge c, \tag{14}$$

$$b \ge 0, \tag{15}$$

где $b = (b_{10}\, b_{11} ... b_{1p}\, b_{1p+2} ... b_{1p+m})'$.

Для решения задачи (13)-(15) запишем условия Куна-Таккера [3]:

$$\nabla Q_e(b) - \sum_{j=1}^{m_1} v_j \nabla s_j(b) - \sum_{j=0}^{p} u_j \nabla g_j(b) = 0,$$

$$s_j(b) = \alpha_{j0}^1 b_{10} + \alpha_{j1}^1 b_{11} + ... + \alpha_{j\,p+m}^1 b_{1p+m} - c_{1j} \ge 0, \quad j = \overline{1, m_1},$$

$$g_j(b) = b_{1j} \ge 0, \quad j = \overline{0, p+m}, \quad j \ne p+1,$$

$$u_j g_j(b) = 0, \quad j = \overline{0, p+m}, \quad j \ne p+1,$$

$$v_j s_j(b) = 0, \quad j = \overline{1, m_1},$$

$$v_j \ge 0, \quad j = \overline{1, m_1},$$

$$u_j \ge 0, \quad j = \overline{0, p+m}, \quad j \ne p+1.$$

Здесь $\nabla Q_e(b), \nabla s_j(b), \nabla g_j(b)$ – градиенты функций $Q_e(b), s_j(b), g_j(b)$ соответственно.

Целевую функцию (13) можно представить в виде

$$Q_e(b) = Y'Y - 2Y'Xb + b'X'Xb. \tag{16}$$

Если ввести в рассмотрение величины

$$d = Y'Y, \quad f = -2Y'X, \quad Q = X'X, \quad u = (u_0\, u_1 ... u_{p+m})', \quad v = (v_1\, v_2 ... v_{m_1})', s = (s_1\, s_2 ... s_{m_1})',$$

тогда функция (16) запишется

$$Q_e(b) = d + f \cdot b + b'Qb.$$

Отсюда

$$\nabla Q_e(b) = f' + 2Qb, \quad \nabla s_j(b) = (\alpha_{j0}^1\, \alpha_{j1}^1 ... \alpha_{jp+m}^1)',$$

$$\nabla g_j(b) = (0\,0 \underset{j}{...} 0\,1\,0 ... 0)', \quad j = \overline{0, p+m}, \quad j \neq p+1.$$

Тогда условия Куна-Таккера формулируются как задача нахождения решения системы уравнений и неравенств в матричной форме:

$$u = 2Qb - A'v + f, \tag{17}$$

$$s = Ab - c, \tag{18}$$

$$u'b + s'v = 0, \tag{19}$$

$$b \geq 0, \quad u \geq 0, \quad v \geq 0, \quad s \geq 0. \tag{20}$$

Эффективным методом решения задачи (28)-(31) является метод решения задачи о дополнительности [3], которая в общем случае формулируется как решение системы уравнений следующего вида:

$$w = Mz + r, \tag{21}$$

$$w'z = 0, \tag{22}$$

$$w \geq 0, \quad z \geq 0, \tag{23}$$

где M – квадратная матрица порядка n, w, z – неизвестные n – мерные векторы, r – заданный n – мерный вектор.

Условие дополняющей нежёсткости (22), являющееся единственным нелинейным ограничением при выполнении неравенств (23), эквивалентно условиям

$$w_i z_i = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Пару переменных w_i и z_i для каждого значения i называют парой взаимодополнительных переменных.

Если все $r_i \geq 0$, то задача (21)-(23) имеет тривиальное решение: $w = r, \ z = 0$.

Если имеется хотя бы одна переменная $r_i < 0$, то начальное базисное решение $w = r, \ z = 0$, удовлетворяющее условию (22), является недопустимым из-за невыполнения неравенств (23). Чтобы получить нетривиальное решение задачи о дополнительности, в исходную линейную систему (21) вводят искусственную переменную z_0:

$$w - Mz - e \cdot z_0 = r,$$

где $e = (1 \quad 1 ... 1 \quad 1)'$ – n – мерный вектор.

Далее для решения задачи реализуется метод последовательного исключения переменных. На первом шаге в базис вводится переменная z_0, которая заменяет базисную переменную w_i, соответствующую наименьшей отрицательной переменной $r_l = \min_i r_i < 0$.

Для выбора вводимой в базис переменной используют правило: в базис вводится переменная, взаимодополнительная к базисной переменной, выводимой из базиса на предыдущем шаге. Тогда всегда выполняется условие (22) в силу равенства нулю одной из пары взаимодополнительных переменных, являющейся свободной.

После конечного числа шагов либо искусственная переменная z_0 будет выведена из базиса, либо правило минимального отношения будет неприемлемо из-за неположительности всех элементов разрешающего столбца.

В первом случае задача о дополнительности имеет решение, во втором – решение отсутствует.

3. Численный пример

Имеется система взаимозависимых уравнений:

$$\begin{aligned} y_1 &= \beta_{10} + \beta_{11}x_1 + \beta_{14}y_2 + \varepsilon_1, \\ y_2 &= \beta_{20} + \beta_{25}y_3 + \varepsilon_2, \\ y_3 &= \beta_{30} + \beta_{32}x_2 + \beta_{34}y_2 + \varepsilon_3. \end{aligned} \tag{24}$$

Требуется оценить её структурные параметры, если они должны удовлетворять системе неравенств:

$$\begin{gathered} 2\beta_0 + \beta_{11} + \beta_{14} \le 25, \\ \beta_{11} + \beta_{14} \ge 8, \\ \beta_{30} + 2\beta_{32} + \beta_{34} \le 10, \\ \beta_{32} + 2\beta_{34} \ge 15, \\ \beta_{10} \ge 0,\ \beta_{11} \ge 0,\ \beta_{14} \ge 0, \\ \beta_{30} \ge 0,\ \beta_{32} \ge 0,\ \beta_{34} \ge 0. \end{gathered} \tag{25}$$

Для решения задачи в 11 наблюдениях были получены следующие значения экзогенных и эндогенных переменных [2]:

Таблица 1

Наблюдение i	x_{1i}	x_{2i}	y_{1i}	y_{2i}	y_{3i}
1	2,3	1,0	46	3,4	24
2	2,4	1,1	48	3,4	25
3	3,2	1,1	49	3,5	25
4	3,4	1,0	52	3,7	26
5	3,4	1,1	52	3,8	27
6	3,4	1,2	54	3,8	27
7	3,3	1,1	57	3,9	28
8	3,4	1,3	59	4,0	29
9	3,5	1,5	59	4,3	31
10	3,5	1,6	60	4,5	33
11	3,6	1,7	61	4,8	35

Показано [2], что первое и третье уравнение системы (24) точно идентифицируемы, а второе уравнение – сверхидентифицируемо.

Приведённая форма модели (4), оценённая обычным МНК, имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1 &= 20{,}9805 + 5{,}7338 \cdot x_1 + 11{,}8721 \cdot x_2, \\ \tilde{y}_2 &= 1{,}1991 + 0{,}2888 \cdot x_1 + 1{,}4339 \cdot x_2, \\ \tilde{y}_3 &= 7{,}9565 + 1{,}6334 \cdot x_1 + 11{,}9946 \cdot x_2. \end{aligned}$$

Поскольку в правой части системы (24) содержатся только две эндогенные переменные y_2 и y_3, то найдём по формулам (5) расчётные значения этих переменных $\tilde{y}_2, \tilde{y}_3$.

Введём в рассмотрение величины $x_3 = \tilde{y}_2, \quad x_4 = \tilde{y}_3$. Тогда система (24) запишется:

$$\begin{aligned} y_1 &= \beta_{10} + \beta_{11}x_1 + \beta_{14}x_3 + \varepsilon_1, \\ y_2 &= \beta_{20} + \beta_{25}x_4 + \varepsilon_2, \\ y_3 &= \beta_{30} + \beta_{32}x_2 + \beta_{34}x_3 + \varepsilon_3, \end{aligned} \tag{26}$$

где значения объясняющих переменных x_1, x_2, x_3, x_4 уже известны.

Оценим параметры первого уравнения системы (26)

$$\hat{y}_1 = b_{10} + b_{11}x_1 + b_{14}x_3,$$

где параметры b_{10}, b_{11}, b_{14} должны удовлетворять неравенствам:

$$\begin{gathered} 2\beta_0 + \beta_{11} + \beta_{14} \le 25, \\ \beta_{11} + \beta_{14} \ge 8, \\ \beta_{10} \ge 0,\ \beta_{11} \ge 0,\ \beta_{14} \ge 0. \end{gathered}$$

Имеем:

$$d = Y'Y = 32677; \quad f = -2Y'X = (-1194 \quad -3879{,}6 \quad -4264{,}23),$$

$$Q = X'X = \begin{pmatrix} 11 & 35{,}4 & 39{,}1865 \\ 35{,}4 & 115{,}88 & 126{,}6743 \\ 39{,}1865 & 126{,}6743 & 139{,}7616 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ c = \begin{pmatrix} -25 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Для первого уравнения $m_1 = 2,\ p + m = 2 + 1 = 3$ и отсюда

$$u = (u_0 \quad u_1 \quad u_2)', s = (s_1 \quad s_2)', v = (v_1 \quad v_2)'.$$

Система уравнений (17), (18) запишется:

$$\begin{aligned} u_0 &= 22b_{10} + 70{,}8b_{11} + 78{,}3730b_{14} - 2v_1 - 1194, \\ u_1 &= 70{,}8b_{10} + 231{,}76b_{11} + 253{,}3487b_{14} - v_1 + v_2 - 3879{,}6, \\ u_2 &= 78{,}3730b_{10} + 253{,}3487b_{11} + 279{,}5233b_{14} - v_1 - v_2 - 4264{,}23, \\ s_1 &= -2b_{10} - b_{11} - b_{14} + 25, \\ s_2 &= b_{11} + b_{14} - 8. \end{aligned}$$

Сравнивая записанные уравнения с видом задачи о дополнительности, можно записать:

$$w = \begin{pmatrix} u \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} b \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{10} \\ b_{11} \\ b_{14} \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} f' \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1194 \\ -3879{,}6 \\ -4264{,}23 \\ 25 \\ -8 \end{pmatrix},$$

$$M=\begin{pmatrix}2Q & -A'\\ A & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22 & 70{,}8 & 78{,}3730 & -2 & 0\\ 70{,}8 & 231{,}76 & 253{,}3487 & -1 & 1\\ 78{,}3730 & 253{,}3487 & 279{,}7618 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Поскольку вектор r имеет отрицательные элементы, то для решения задачи необходимо ввести в рассмотрение искусственную переменную z_0.

Тогда получается следующая начальная таблица для реализации описанного метода решения, в которой переменные $w_1 - w_5$ являются базисными, а остальные переменные – свободными:

Таблица 2

w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_0	r
1	0	0	0	0	-22	-70,8	-78,37	2	0	-1	-1194
0	1	0	0	0	-70,8	-231,76	-253,34	1	-1	-1	-3879,6
0	0	1	0	0	-78,37	-253,34	-279,76	1	-1	-1	-4264,23
0	0	0	1	0	2	1	1	0	0	-1	25
0	0	0	0	1	0	-1	-1	0	0	-1	-8

На первом шаге искусственную переменную z_0 вводим в базис, а разрешающей строкой будет третья, так как $r_3 = -4264{,}23$ является наименьшим отрицательным элементом столбца r таблицы 2. Отсюда базисную переменную w_3 выводим из базиса ($z_0 \uparrow, w_3 \downarrow$).

Поскольку переменная w_3 выведена из базиса, то на следующем шаге, согласно правилу, взаимодополнительную переменную z_3 введём в базис.

После 4 аналогичных шагов ($z_3 \uparrow w_2 \downarrow \Rightarrow z_2 \uparrow w_1 \downarrow \Rightarrow z_1 \uparrow w_4 \downarrow \Rightarrow z_4 \uparrow z_0 \downarrow$) получаем итоговую таблицу:

Таблица 3

w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_0	r
0,023	-0,425	0,379	0,044	0	0	1	0	0	-0,046	-0,020	8,08497
-0,018	0,379	-0,342	-0,202	0	0	0	1	0	0,037	0,183	6,45426
-0,579	-0,043	0,201	-0,011	0	0	0	0	1	0,158	0,431	0,33784
-0,002	0,023	-0,018	0,579	0	1	0	0	0	0,004	-0,581	5,23038
0,005	-0,046	0,037	-0,158	1	0	0	0	0	-0,010	-0,837	6,53923

Из таблицы 3 считываем решение задачи:

$$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 0;\ w_5 = 6{,}53923;\ z_1 = 5{,}23038;$$

$$z_2 = 8{,}08497;\ z_3 = 6{,}45426;\ z_4 = 0{,}33784;\ z_5 = z_0 = 0.$$

Отсюда

$$b_{10} = z_1 = 5{,}23038;\quad b_{11} = z_2 = 8{,}08497;\quad b_{14} = z_3 = 6{,}45426.$$

Таким образом, получено следующее первое уравнение системы с учётом ограничений типа неравенств на параметры:

$$\hat{y}_1 = 5{,}2304 + 8{,}0850 \cdot x_1 + 6{,}4543 \cdot y_2 .$$

Повторяя описанную процедуру с третьим уравнением, получим:

$$\hat{y}_3 = 0{,}3792 \cdot x_2 + 9{,}2416 \cdot y_2 .$$

В итоге получаем искомую модель взаимозависимых уравнений с учётом ограничений типа неравенств на параметры:

$$\hat{y}_1 = 5{,}2304 + 8{,}0850 \cdot x_1 + 6{,}4543 \cdot y_2 ,$$
$$\hat{y}_2 = 3{,}8696 + 0{,}00173 \cdot y_3 ,$$
$$\hat{y}_3 = 0{,}3792 \cdot x_2 + 9{,}2416 \cdot y_2 .$$

Литература

1. Талызин В.А., Кирпичников А.П., Аглиуллин И.Н. Оценивание параметров системы взаимозависимых уравнений с ограничениями на структурные параметры в задачах эконометрики. Вестник технологического университета, 2015, Т. 18, № 16, 246–249 с.

2. Новак Э. Введение в методы эконометрики. Сборник задач: Пер. с польск. / под ред. И.И. Елисеевой. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 248 с.

3. Рейклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике. В 2-х книгах. – М.: Мир, 1986. Кн. 1. – 349 с., Кн. 2. – 320 с.